

Associazione  
Termotecnica  
Italiana

Sezione  
Umbria

49<sup>o</sup>

# Congresso Nazionale ATI

*49<sup>th</sup> ATI National Congress*

Perugia, 26-30 Settembre 1994

*estratto*

**ATTI DEL CONGRESSO  
CONGRESS PROCEEDINGS**

**SGE** EDITORIALI  
PADOVA



# TRANSITORI TERMICI ED ELETTROMAGNETICI IN CONDUTTORI PIANI

G. Galli<sup>1</sup> - F. Cotana<sup>2</sup> - F. Rossi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dipartimento di Energetica - Università di L'Aquila - Monteluco di Roio - L'Aquila

<sup>2</sup> Istituto di Energetica - Università di Perugia - Perugia

## **Sommario**

*Un codice di calcolo implementato al calcolatore consente di valutare la distribuzione di corrente e temperatura all'interno di un conduttore piano durante il transitorio elettromagnetico.*

*I risultati mostrano che quando il transitorio elettromagnetico produce impulsi di corrente aventi costante di tempo minore di  $10^{-3}$  s si possono verificare incrementi di temperatura non trascurabili in prossimità dei bordi del conduttore. Si mostra inoltre che il campo termico, per tempi piccoli, dipende in modo del tutto trascurabile dal coefficiente di scambio termico con l'esterno. Infine, si riporta un procedimento analitico per la valutazione della distribuzione di temperature valido per tempi inferiori al secondo dall'inizio del transitorio elettromagnetico.*

## **1. Introduzione**

In alcune applicazioni dell'elettronica, quali le prove di corto circuito nelle blindosbarre dei grandi circuiti di potenza, e gli impieghi della propulsione elettromagnetica nei trasporti (levitazione magnetica) o per il lancio di proiettili (rail-guns), caratterizzate da durate del fenomeno molto brevi e da potenze molto elevate, può essere importante valutare il campo termico prodotto dalla distribuzione della densità di corrente [1],[2].

Si è visto infatti [3],[4] che in alcuni transitori elettromagnetici, con tempi di salita del campo dell'ordine di  $10^{-4}$  s e con correnti dell'ordine di  $10^5$  A, che si possono avere in alcune applicazioni della tecnologia della propulsione elettromagnetica, è possibile trovare innalzamenti locali della temperatura così forti da produrre un'eccessiva sublimazione del conduttore o la sua fusione. Può essere quindi interessante valutare il comportamento di un sistema semplice (una lastra conduttrice con distribuzione di corrente e di temperatura monodimensionali) durante un transitorio elettrodinamico, per mettere in evidenza per quali caratteristiche dell'impulso di corrente e del conduttore si possono avere riscaldamenti notevoli anche in tempi molto brevi, e, più in generale, quand'è che ci può essere un'iterazione non trascurabile tra il transitorio elettromagnetico e quello termico.

## **2. Determinazione della densità di corrente**

L'andamento della corrente, determinato sperimentalmente durante i transitori di corto circuito nelle blindobarre è dato da:

$$I = I_1 e^{-\beta t} + I_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

dove  $I_1$ ,  $I_2$  e  $\varphi$  sono tali che per  $t=0$  la corrente è nulla, cioè:

$$\varphi = \ar \cos\left(-\frac{I_1}{I_2}\right) \quad (2)$$

Nell'ipotesi di campo quasi-stazionario, cioè supponendo di poter trascurare la corrente di spostamento, e nell'ipotesi che valga  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , dove  $\sigma$  è il valore stazionario della conducibilità [5], il campo magnetico all'interno del conduttore obbedisce alla:

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{D_e} \frac{\partial \vec{H}}{\partial \tau} \quad (3)$$

dove  $D_e = \mu\sigma$  che, per analogia con l'equazione di Fourier, può essere chiamata diffusività elettrica.

All'istante iniziale deve essere  $H=0$  in ogni punto del conduttore, mentre si suppone che i valori di  $H$  sulla superficie che delimita il conduttore dipendono dalla geometria del sistema e dal valore istantaneo della corrente, quindi sono noti quando è assegnata la (1).

La densità di corrente si ricava dalla:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} \quad (4)$$

Si suppone che il conduttore sia una lastra indefinita di spessore "d" (vedi fig.1); si assume, inoltre, un sistema di riferimento tale che l'asse "x" è diretto lungo lo spessore della lastra e che la densità corrente ha direzione parallela all'asse "y" ed è funzione solo di x e  $\tau$ ; in virtù di tali asserzioni il campo magnetico è diretto secondo l'asse "z" (vedi fig.1).

Dalle (1) e (4) si ottiene che la densità di corrente è data da:

$$J(x, \tau) = J_c + \text{Re}(J_\omega) \quad (5)$$

con:

$$J_c = \frac{1}{2} I_1 \sqrt{\frac{\beta}{D_e}} \frac{\cos\left(x \sqrt{\frac{\beta}{D_e}}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2} \sqrt{\frac{\beta}{D_e}}\right)} \cdot e^{-\beta\tau} + 2 \frac{I_1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{2\pi n x}{d}\right)}{1 - \frac{\beta d^2}{4\pi^2 n^2 D_e}} \cdot e^{-4\pi^2 n^2 \frac{D_e \tau}{d^2}} \quad (6)$$

e

$$J_\omega = \frac{1}{2} I_2 (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D_e}} \frac{\cosh\left[x(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D_e}}\right]}{\sinh\left[\frac{d}{2}(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D_e}}\right]} \cdot e^{i(\omega\tau + \varphi)}$$

$$+2 \frac{I_2}{d} e^{i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2\pi nx}{d}\right)}{1 + i \cdot \frac{\omega d^2}{4\pi^2 n^2 D_e}} \cdot e^{-4\pi^2 n^2 \frac{D_e \tau}{d^2}} \quad (7)$$

Siccome di solito è  $D_e \approx 10^{-2}$  m<sup>2</sup>/s, si ha, nella maggior parte dei casi pratici, che  $D_e$  è di due ordini di grandezza maggiore della diffusività termica, quindi i transitori elettromagnetici, rappresentati dalle serie che compaiono nelle (6) e (7), durano molto di meno dei transitori termici: se lo spessore non è molto maggiore di 1cm, si ha che per  $\tau \geq 10^{-2}$  s, gli effetti legati al tempo di penetrazione del campo magnetico nel conduttore, cioè alla durata del transitorio elettromagnetico, sono già trascurabili.

Inoltre, come si vede dalle figg. 2,3,4,5,6 anche per  $\tau \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$  s, l'effetto del transitorio è notevole solo se il tempo di salita della corrente  $T_s=1/\beta$  è abbastanza piccolo, cioè se  $\beta > 10^3$  s<sup>-1</sup>. In tali figure si riporta in ascisse la variabile spaziale adimensionalizzata:

$$x^* = \frac{2x}{d} \quad (8)$$

in ordinate la densità di corrente adimensionale così definita:

$$J^* = \frac{d \cdot J}{I_2} \quad (9)$$

In virtù della simmetria della densità di corrente rispetto all'asse "z" (vedi eq. (6) e(7)) gli andamenti rappresentati nelle figure si riferiscono al solo semipiano per cui  $x < 0$ .

### 3. Transitorio termico

Il tempo che impiega il campo termico per andare a regime è molto maggiore di quello necessario alla densità di corrente per raggiungere la situazione di regime, rappresentata dal primo termine delle (6) e (7); quindi, in generale, per il calcolo delle temperature sarà sufficiente tener conto, nel termine di generazione di calore, soltanto dei termini che danno i valori a regime della densità di corrente.

Però si è visto che per tempi di salita molto piccoli della corrente, cioè per  $\beta$  molto grandi, si possono avere, anche se per tempi molto brevi, forti concentrazioni della densità di corrente, e quindi grande generazione di calore, in zone del conduttore molto ristrette, prossime alla superficie.

In casi particolari potrebbe accadere che la temperatura raggiunga valori non del tutto trascurabili, anche in tempi molto piccoli a partire dall'inizio del transitorio nelle zone corrispondenti alla elevata generazione di calore.

Per verificare questa ipotesi, si è effettuato un calcolo numerico del campo termico prodotto dalla densità di corrente (5) nel sistema indicato in fig. 1, con coefficienti di scambio termico variabili tra 0 e 10 W/m<sup>2</sup>°K.

Vista la simmetria del campo termico attorno all'asse "z", nelle figg. 6,7,8,9,10,11 sono riportati gli andamenti della temperatura adimensionale nel semipiano per cui  $x < 0$ .

La temperatura adimensionale  $\theta$  è così definita:

$$\theta = \frac{T - T_a}{\Delta T} \quad \text{con} \quad \Delta T = \frac{I_2^2}{4\sigma\lambda} \quad (10)$$

dove  $I_2$  è l'ampiezza per unità di lunghezza della componente armonica della corrente.

Si vede che, per tempi minori o dell'ordine del millisecondo, si hanno valori della temperatura ai bordi del conduttore nettamente più alti che nella zona centrale e che le  $\theta$  crescono notevolmente quando il tempo di salita diminuisce.

Questo comportamento, legato al forte effetto pelle del transitorio elettromagnetico, può portare a riscaldamenti notevoli, sui bordi dei conduttori, anche in tempi molto piccoli; tale fenomeno è evidente in certi tipi di transistori elettromagnetici in cui il tempo di salita della corrente è molto piccolo ed i valori della corrente sono particolarmente elevati [3],[4].

Questi valori della temperatura sono molto inferiori a quelli che si avrebbero, con la corrente data dalla (1) a regime, però sono comunque notevolmente maggiori di quelli che si avrebbero, per la stessa corrente, se non si tenesse conto della disomogeneità della distribuzione della densità di corrente dovuta all'effetto pelle prodotto dal transitorio elettromagnetico. Invece, nel caso delle prove di corto circuito nelle blindosbarre, che durano per tempi dell'ordine di 1s, e hanno spesso tempi di salita dell'impulso di corrente non molto minori di 0.1s, l'effetto del transitorio del campo elettromagnetico su quello termico è in genere del tutto trascurabile e, per calcolare il campo termico, è sufficiente tener conto, nel termine di generazione di calore, del valore efficace della densità di corrente a regime.

#### 4. Analisi approssimata del campo termico

Come si vede dalle figg. 6,7,8,9,10,11 l'effetto del valore del coefficiente di scambio "h" termico con l'ambiente esterno sull'andamento di  $\theta$ , per tempi fino a 1s, è molto piccolo.

Si può quindi cercare un'espressione semplificata del campo termico valida per piccoli valori del tempo.

Supponendo  $T_a=0$  consideriamo, l'equazione:

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{J^2}{\sigma \lambda} \quad (11)$$

con le condizioni:

$$\tau = 0 \rightarrow T = 0$$

$$x = \frac{d}{2} \rightarrow \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -hT \quad \text{e} \quad x = -\frac{d}{2} \rightarrow \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = hT$$

L'equazione per la trasformata di Laplace della T e della J è:

$$\frac{p}{D} \bar{T} = \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \frac{\bar{J}^2}{\sigma \lambda} \quad (12)$$

con le condizioni:

$$x = \frac{d}{2} \rightarrow \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = -h\bar{T} \quad \text{e} \quad x = -\frac{d}{2} \rightarrow \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = h\bar{T}$$

Risolvendo la (12) si ottiene:

$$\bar{T} = \bar{T}_j + C \cdot \cosh(qx) \quad (13)$$

dove  $\bar{T}_j$  è una soluzione particolare della (12),  $q = \sqrt{\frac{p}{D}}$  e, nell'ipotesi che  $\bar{J}^2$  sia simmetrica in x:

$$C = \frac{-h\bar{T}_j \left( \frac{d}{2} \right) - \lambda \left( \frac{d\bar{T}_j}{dx} \right)_{\frac{d}{2}}}{\lambda q \cdot \sinh \left( q \frac{d}{2} \right) + h \cdot \cosh \left( q \frac{d}{2} \right)} \quad (14)$$

Ponendo:

$$\varphi(x, \tau) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{T}_j) \quad (15)$$

$$F(x, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\cosh(qx)}{\lambda q \cdot \sinh \left( q \frac{d}{2} \right) + h \cdot \cosh \left( q \frac{d}{2} \right)} \right) \quad (16)$$

$$\varphi_1(\tau) = -h \cdot \varphi \left( \frac{d}{2}, \tau \right) - \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=\frac{d}{2}} \quad (17)$$

si avrà:

$$T = \varphi(x, \tau) + \int_0^{\tau} F(x, t) \cdot \varphi_1(\tau - t) \cdot dt \quad (18)$$

Se si può porre  $h=0$ , un'espressione di  $F(x, \tau)$ , utile per  $\frac{d^2}{D\tau} \geq 1$  risulta [6]:

$$F(x, \tau) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{D}{\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-\frac{\left( \frac{2n+1}{2}d-x \right)^2}{4D\tau}} + e^{-\frac{\left( \frac{2n+1}{2}d+x \right)^2}{4D\tau}} \right] \quad (19)$$

La relazione (18) fornisce l'andamento della temperatura per tempi minori di 1 secondo e risulta utile nello studio dei campi termici quando si verificano transitori elettromagnetici molto veloci e molto forti come avviene in molte applicazioni di propulsione elettromagnetica e nei "cannoni elettromagnetici" (rail-guns) [3],[4].

### 5. Conclusioni

Si è visto che un effetto non trascurabile del transitorio elettromagnetico sul campo termico può presentarsi solo quando il tempo caratteristico della variazione dell'impulso di corrente è non superiore a  $10^{-3}$ s.

Già per tempi di questo ordine di grandezza si possono verificare incrementi apprezzabili di temperatura; in tali condizioni, per elevati valori della potenza elettrica, gli incrementi di temperatura

possono essere notevoli nelle vicinanze dei bordi del conduttore ad una profondità dell'ordine della penetrazione del campo magnetico.

L'effetto delle dimensioni del conduttore non sembra rilevante, almeno per spessori non molto minori di 0,01m; per tempi inferiori a 1s del tutto trascurabile appare l'influenza sul campo termico degli scambi termici con l'ambiente esterno.

Nel caso delle prove di corto circuito nelle blindosbarre, i tempi di salita della corrente di solito sono tali che l'effetto del transitorio elettromagnetico sul campo termico è completamente trascurabile, e per valutare la distribuzione delle temperature nel conduttore è sufficiente tener conto del valore efficace della densità di corrente e regime.

## 6. Lista dei simboli

- I = Corrente totale [A];
- $I_1$  = Componente transitoria della corrente totale [A];
- $I_2$  = Componente armonica della corrente totale [A];
- $\beta$  = Costante di tempo del circuito elettrico [ $s^{-1}$ ];
- $\omega$  = Pulsazione della corrente armonica [rad/s];
- $\tau$  = Variabile tempo [s];
- $\varphi$  = Fase iniziale della componente armonica della corrente [rad];
- J = Densità di della corrente totale [ $A/m^2$ ];
- $J_c$  = Densità della componente transitoria della corrente [ $A/m^2$ ];
- $J_\omega$  = Densità della componente armonica della corrente [ $A/m^2$ ];
- $J^*$  = Densità di corrente adimensionale;
- E = Campo elettrico [N/Coulomb];
- $\sigma$  = Conducibilità elettrica [ $\Omega^{-1} m^{-1}$ ];
- H = Campo magnetico [A/m];
- $D_e$  = Diffusività elettrica [ $m^2/s$ ];
- $\mu$  = Permeabilità magnetica del mezzo [Henry/m];
- x = Variabile spaziale [m];
- $x^*$  = Variabile spaziale adimensionale;
- d = Larghezza del conduttore [m];
- i = Unità immaginaria;
- T = Temperatura [ $^{\circ}K$ ];
- $T_a$  = Temperatura ambiente [ $^{\circ}K$ ];
- $\Theta$  = Temperatura adimensionale
- $\lambda$  = Conducibilità termica [ $W/^{\circ}Km$ ];
- D = Diffusività termica [ $m^2/s$ ];
- h = Fattore di adduzione [ $W/^{\circ}Km^2$ ];
- p,q = Variabili complesse nel dominio della trasformata di Laplace;
- $\bar{T}$  = Trasformata di Laplace del campo termico;
- $\mathcal{L}^{-1}$  = Operatore trasformata inversa di Laplace;

## Bibliografia

- [1] F.J. Davies: "Conduction and induction heating". IEE Power Engineering Series 11, Peter Peregrinus Ltd. London, UK, 1990.
- [2] E.J.W. ter Maten, J.B.M. Melissen: "Simulation of induction heating". IEEE Trans. Mag. 28, 1992 p.p. 1287-1290.

[3] E. Cardelli, a : "Modelling of the transient diffusion of current and heat in railguns via an equivalent network" sarà pubblicato su IEEE Trans. Mag. 31, 1995.

[4] E. Cardelli, b: "Electromagnetic and thermal analysis of muzzle-fed railguns" sarà pubblicato su IEEE Trans.Mag., 1995.

[5] Landau, Lifchitz: "Elettrodinamica dei mezzi continui". Editori riuniti, 1980.

[6] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger: "Conduction of heat in solids". Oxford Press, Oxford, UK, 1959.

### Abstract

*Effects of fast electromagnetic transient on the thermal field in plane conductors is evaluated by means of the numerical simulation of the one-dimensional current and temperature distributions.*

*It is shown that non negligible heating can be detected in narrow zones along the conductor boundaries for time constants of the electromagnetic pulse less than  $10^{-3}$  s. Also, it is shown that heat exchange coefficient "h" produces a negligible influence on temperature distribution. Finally, an analitical method to evaluate temperature distribution during short electromagnetic transients is given.*

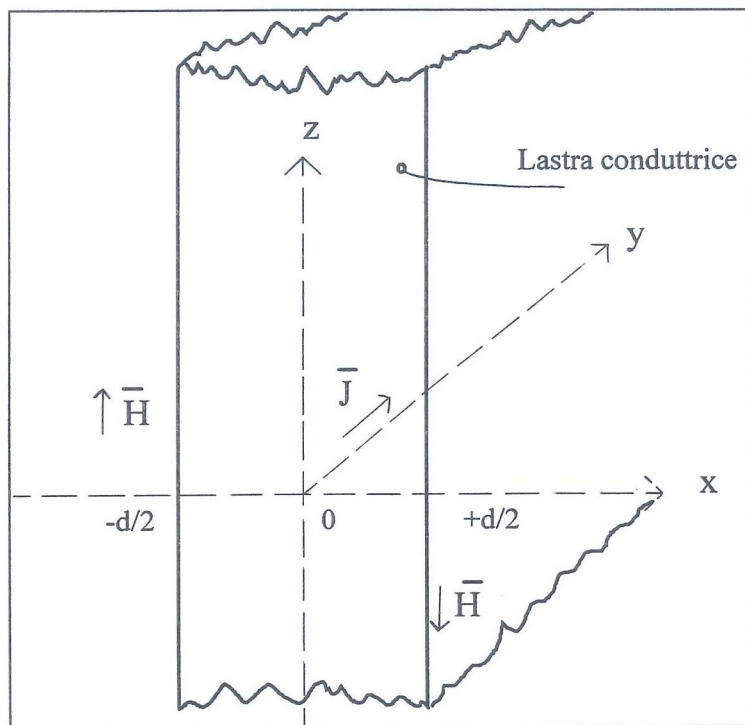


Fig.1: Lastra conduttrice con sistema di riferimento: sono indicate le direzioni della densità di corrente e del campo magnetico.

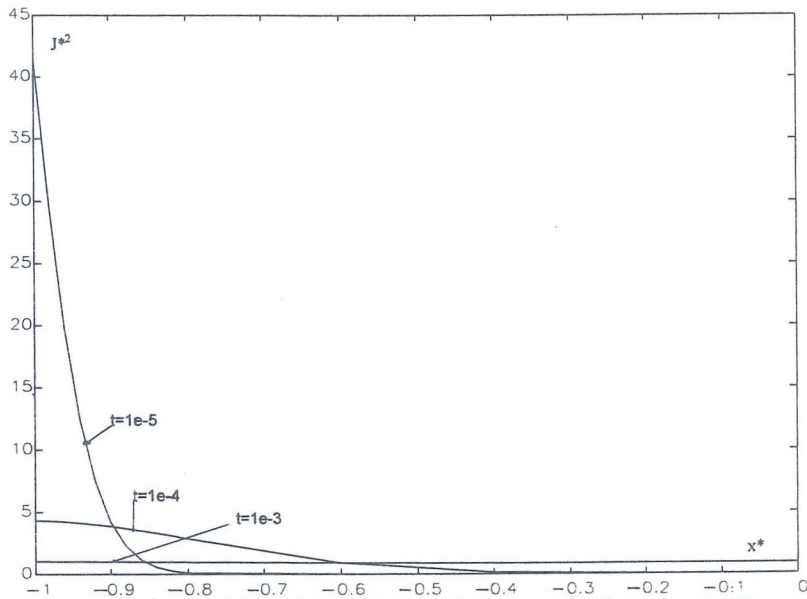


Fig.2: Andamento del quadrato della densità di corrente adimensionale (9) nelle seguenti condizioni:  $\beta=1e5, d=0.01$

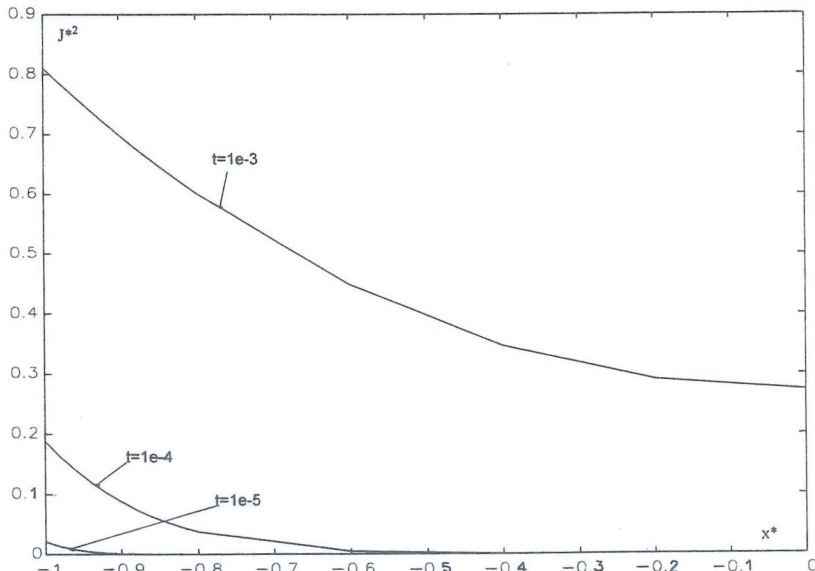


Fig.3: Andamento del quadrato della densità di corrente adimensionale (9) nelle seguenti condizioni:  $\beta=1e3, d=0.01$

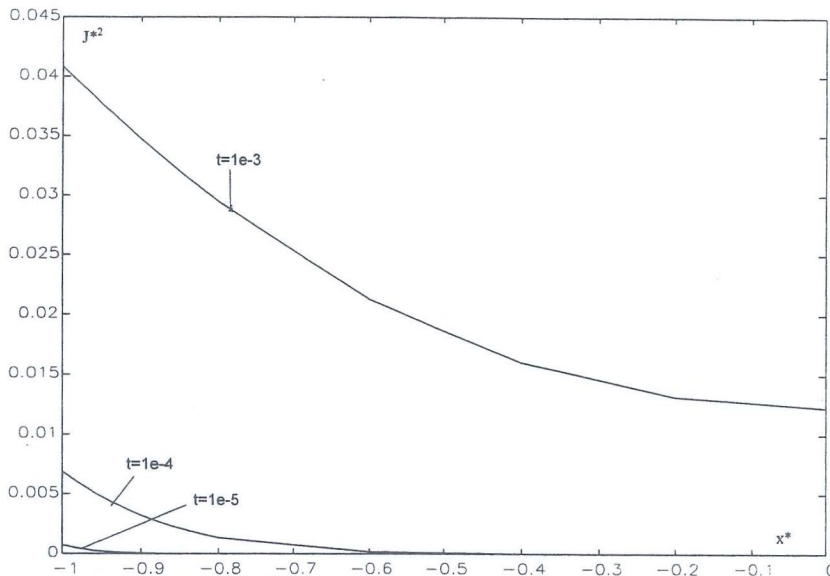


Fig.4: Andamento del quadrato della densità di corrente adimensionale (9) nelle seguenti condizioni:  $\beta=6, d=0.01$

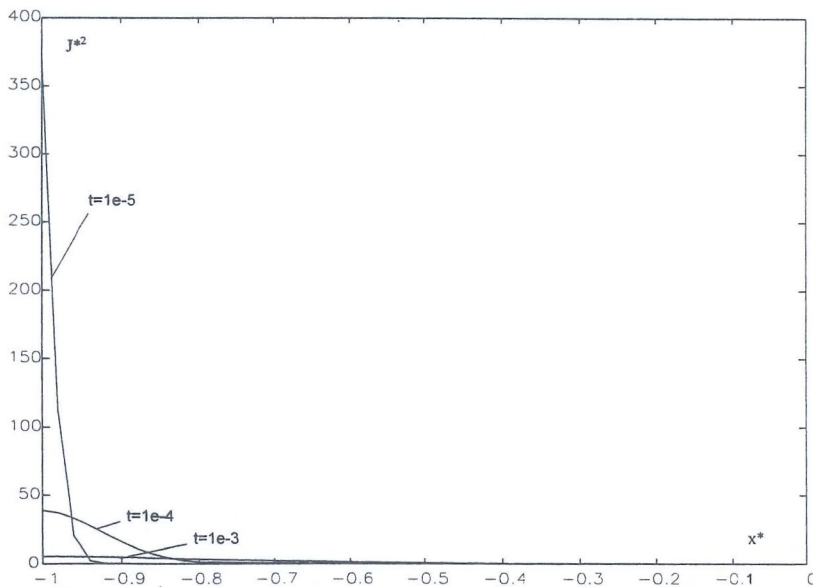


Fig.5: Andamento del quadrato della densità di corrente adimensionale (9) nelle seguenti condizioni:  $\beta=1e5, d=3$

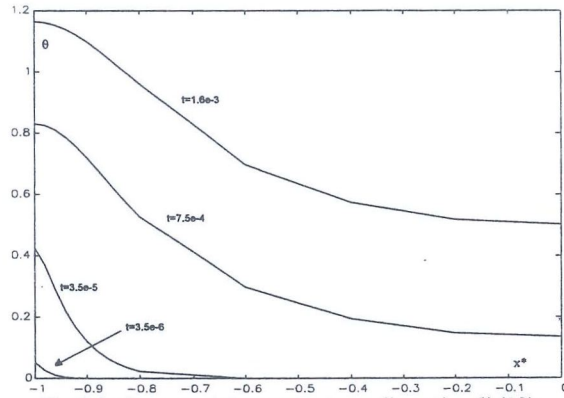


Fig. 6: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.01\text{m}$ ;  $\beta=1\text{e}5$ ,  $h=0,1,2\dots 10$ .

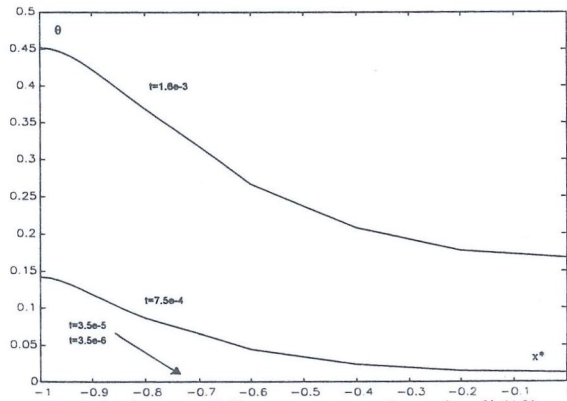


Fig. 7: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.01\text{m}$ ;  $\beta=1\text{e}3$ ,  $h=0,1,2\dots 10$ .

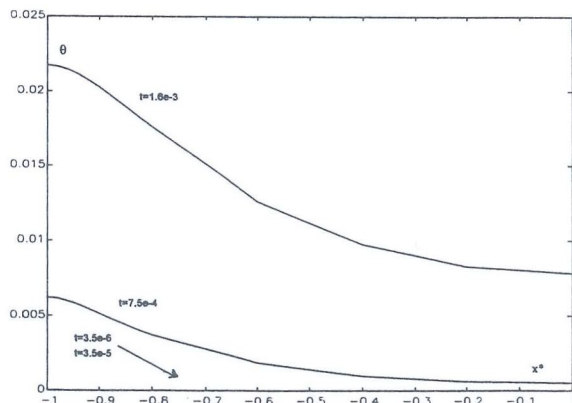


Fig. 8: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.01\text{m}$ ;  $\beta=6$ ,  $h=0,1,2\dots 10$ .

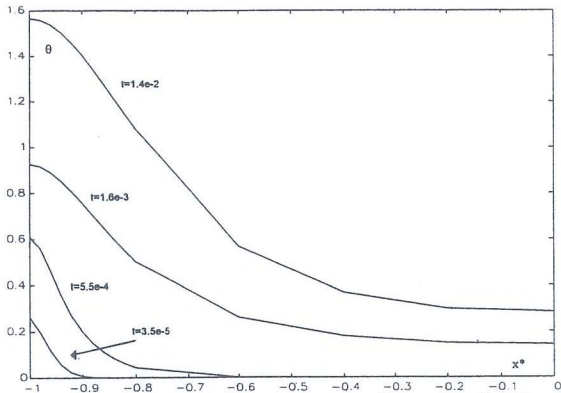


Fig.9: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.03m$ ;  $\beta=1e5$ ,  $h=0,1,2...10$ .

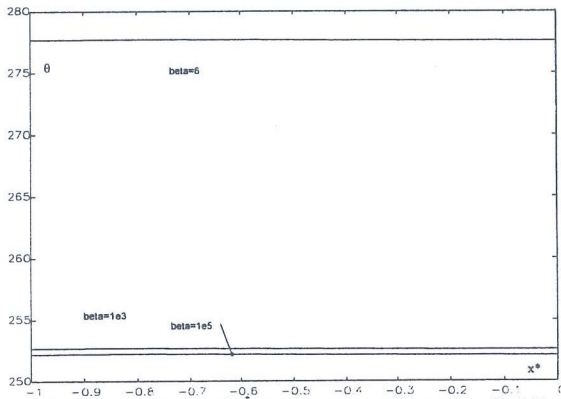


Fig.10: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.01m$ ;  $t=1s$ ,  $h=0,1,2...10$ .

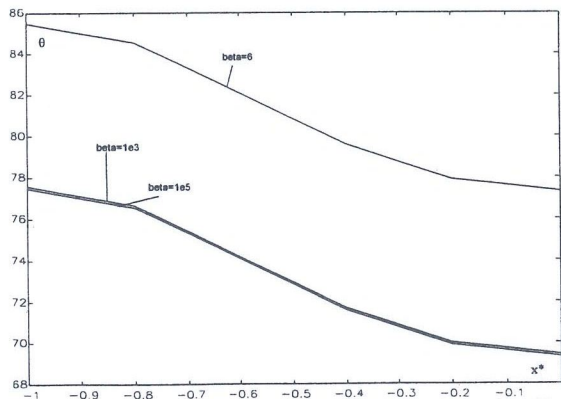


Fig.11: Andamento delle temperature adimensionali (10) nelle condizioni:  $d=0.03m$ ;  $t=1s$ ,  $h=0,1,2...10$ .